Es ergibt sich für a der Ausdruck $a = 2\pi^2 \rho_\Lambda GR$.

1.1 Herleitung der Expansionsgeschwindigkeit v

Die Entwicklung eines Ausdrucks für die Ausdehnungsgeschwindigkeit v benötigt zur Grundlage eine Differentialgleichung, da die zugrunde liegende Beschleunigung a nicht konstant ist. Eine Möglichkeit, einer solchen Verkomplizierung aus dem Weg zu gehen, ist die Durchschnittsbeschleunigung $\bar{a}$. Sie berechnet sich aus dem Integral von a nach R geteilt durch die Weglänge R: $\bar{a} = \frac{1}{R}\int_0^R 2\pi^2 \rho_\Lambda GRdR$.

$$\bar{a} = \pi^2 \rho_\Lambda GR$$

Mit $\bar{a}$ kann über die Beziehungen der gleichförmig beschleunigten Bewegung gearbeitet werden:

$v = \sqrt{2\bar{a}R}$ nach $v(h) = \sqrt{2gh}$, der Geschwindigkeit des freien Falls.

$v = \sqrt{2\pi^2 \rho_\Lambda G}R$,

also eine Konstante mal dem Radius, genau wie der Ausdruck für die Expansionsgeschwindigkeit nach H_0:

$$v = H_0 R$$

1.2 Herleitung der Exponentialfunktion für R(t)

Die Grundlagen für die Darstellung von R,a und v nach der Zeit sind:

$$H = \sqrt{2\pi^2 \rho_\Lambda G}$$
$$v = \sqrt{2\pi^2 \rho_\Lambda G}R \Rightarrow v = HR$$
$$a = 2\pi^2 \rho_\Lambda GR \Rightarrow a = H^2 R$$

Die Zeit t, die für einen Weg, hier R, benötigt wird, errechnet sich über $a = dv/dt$ nach:

$$dt = \frac{dv}{a}$$

$$dv = \frac{d}{dR}HR = H$$

$$dt = \frac{H}{H^2 R} = \frac{1}{HR}$$

Jetzt muss die inkremental kleine Zeit dt nur noch aufsummiert werden (Da es sich um einen exponentiellen Zusammenhang handelt, wird die Anfangsgröße des Universums mit einem Radius von einem Meter angenommen).

$$T = \int_1^R dt dR = \int_1^R \frac{1}{HR} dR$$

$$T = \frac{1}{H} \ln(R)$$

Der Radius des Universums zu einer Zeit T ergibt sich dementsprechend zu $R = e^{HT}$, die Ausdehnungsgeschwindigkeit zu $v = He^{HT}$, und die Ausdehnungsbeschleunigung zu $a = H^2 e^{HT}$